38 найпривабливіших математичних формул

Share on vk Share on twitter Share on facebook

Нейробіологи з Великобританії провели експеримент, в ході якого попросили математиків оцінити красу математичних формул, запропонувавши їм список з 60 різних формул. Після цього учасникам експерименту по черзі показували красиві і некрасиві формули. За відгуком їх мозку спостерігали за допомогою функціональної магнітно-резонансної томографії (fMRI).

Як виявили нейробіологи, перегляд красивих, з точки зору математиків, формул викликає реакцію в префронтальній корі головного мозку, що відповідає за складні когнітивні функції та емоції. Проаналізувавши реакцію, вчені прийшли до висновку, що сприйняття краси математики дуже схоже на відчуття, що виникає під час прослуховування музики або перегляду творів живопису.

Пропонуємо читачам самостійно оцінити красу деяких математичних формул, що використовувалися в цьому експерименті .

$$1 + e^{i\pi} = 0$$

1. Тотожність Ейлера

Тотожність Ейлера є наслідком формул Ейлера, що пов'язують експоненту комплексного числа з тригонометричними функціями. Ця формула є основною для експоненціального подання комплексних чисел і формул Муавра для вираження синусів і косинусів кратних кутів (у школі проходять окремі випадки цієї формули для подвоєних і потроєних кутів).

Саме цю тотожність учасниками експерименту було визнано найкрасивішою.

$$\cos^2\theta + sin^2\theta = 1$$

2. Основна тригонометрична тотожність

Ця формула пов'язує дві основні тригонометричні функції. Зазвичай її виводять геометрично, з теореми Піфагора для прямокутного трикутника з гіпотенузою, рівною одиниці: синус кута при гіпотенузі буде в цьому випадку відношенням протилежного катета до гіпотенузи, а косинус - прилеглого.

$$V - E + F = 2$$

3. Формула для ейлерової характеристики

У найпростішому випадку ця формула пов'язує між собою кількість вершин (V), ребер (E) і граней (F) довільного опуклого многогранника.

$$\int_M K dA + \int_{\partial M} k_g ds = 2\pi\chi(M)$$

4. Формула Гауса-Бонні

В окремому випадку ця формула пов'язує локальну характеристику поверхні під назвою гаусова кривизна (вона є мірою того, наскільки поверхня відрізняється від площини) і її глобальну, топологічну характеристику - кількість наскрізних дірок. Така інтерпретація підходить для двовимірної поверхні, виготовленої з, наприклад, сфери або тора. У сфери, до речі, наскрізних дірок немає, а у тора вона одна.

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

5. Формула Ейлера

Саме та формула Ейлера, про яку говорилося спочатку. Тотожність Ейлера є її окремим випадком, якщо замість x підставити «пі».

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

6. Інтеграл Ейлера-Пуассона

Це співвідношення є інструментом для обчислення ймовірностей у випадку, коли йдеться про розподіл Гауса.

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \quad s \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1$$

7. Формула Рімана-Діріхле-Мебіуса

У цій формулі зліва стоїть знаменита дзета-функція Рімана, а праворуч - ряд Діріхле для функції Мебіуса. Функція Мебіуса визначена для натуральних чисел і дорівнює 1, якщо число складається з парного числа простих множників, серед яких немає однакових, -1, якщо число складається з непарного числа таких множників, і 0 - у всіх інших випадках. Ця формула демонструє глибокий зв'язок дзета-функції з теорією чисел.

$$exp(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$$

8. Формула для експоненти

Зображення експоненти у вигляді ряду.

$$\mathcal{F}_x\left[e^{-ax^2}\right](k) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\pi^2 k^2/a^2}$$

9. Перетворення Фур'є від функції Гауса

Ця формула показує, що перетворення Фур'є (використовується, наприклад, в радіотехніці, але далеко не лише в ній) від гаусової функції - це знову функція Гауса, правда, з чисельним коефіцієнтом та іншим множником показника.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

10. Число e

Визначення числа *e* як границі деякої числової послідовності.

$$2^{|S|} > |S|$$

11. Теорема Кантора для натуральних чисел

Для порівняння двох нескінченних множин у математиці використовується поняття бієкції. Кажуть, що дві множини рівнопотужні, якщо між їхніми елементами можна встановити взаємнооднозначну відповідність. Якщо, наприклад, множина *A* рівнопотужна деякій підмножині множини *B*, а *B* НЕ рівнопотужна *A*, то кажуть, що *B* - потужніша. Теорема Кантора в даному випадку стверджує, що множина точок відрізка потужніша множини натуральних чисел.

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

12. Квадратичний ітераційний процес

Бенуа Мандельброт виявив, що за допомогою таких, здавалося б, простих процесів можна будувати дуже складні множини. Він назвав їх фракталами. Квадратичний ітераційний процес дозволяє будувати множину Мандельброта.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)\, f(y) dy$$

13. Дельта-функція Дірака

Дельта-функція є насправді не функцією, а узагальненою функцією. Наведений інтеграл можна використовувати як її означення. Такі функції дуже активно використовуються у фізиці

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!\,(1103 + 26390k)}{(k!)^4\, 396^{4k}}$$

14. Формула Рамануджана

Ця формула для числа «пі» примітна своєю відносно швидкою (на момент відкриття, початок XX століття) збіжністю ряду в правій частині.

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$

15. Мінімальне число таксі

Одного разу математик Годфрі Харді відправився відвідати прихворілого математика Срініваса Рамануджана. Після прибуття Харді зауважив, що приїхав на таксі «з досить нудним номером» 1729. На це Рамануджан негайно заперечив, що 1729 - дуже цікаве число. Це мінімальне число з натуральних, для якого існує кілька розкладів в суму двох кубів. Завдяки цій історії такі числа (тобто зображувані у вигляді суми двох кубів кількома способами) отримали найменування чисел таксі.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

16. Теорема Піфагора

Сума квадратів катетів дорівнює квадрату гіпотенузи. Ця теорема була відома ще в Межиріччі приблизно за 1800 років до нашої ери.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(s)\,ds = f(x)$$

17. Первісна та похідна

Ця формула є окремим випадком формули Ньютона-Лейбніца. Вона дозволяє зв'язати дві найважливіші операції математичного аналізу - диференціювання та інтегрування.

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum \mathrm{Res}(f, a_k)$$

18. Теорема Коші про лишки

Теорема стверджує, що, коли мова йде про комплексні функції, для обчислення інтеграла за замкнутим контуром достатньо обчислити деякі величини в особливих точках функції, які потрапили в обмежену контуром область. Завдяки цій теоремі, наприклад, стає можливим обчислення різних нескінченних сум.

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y), \qquad \frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x)$$

19. Модель Лотки-Вольтерри

Ця система нелінійних диференціальних рівнянь описує динаміку в найпростішій екосистемі, що складається з одного виду хижаків і одного виду жертв. Часто використовується як приклад порівняльної нестійкості рівноваги в таких екосистемах - досить сильне збурення може призвести до вимирання видів.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

20. Рівняння дифузії

Рівняння описує процес дифузії - тобто поступового взаємного проникнення - двох середовищ.

$$\pi = \frac{c}{d}$$

21. Формула для «пі»

Мабуть, найголовніша формула для числа «пі». Тут c - довжина кола, а d - її діаметр.

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

22. Диференціювання експоненти

Одна з чудових властивостей експоненти: її похідна дорівнює їй самій. Легко показати, що експонента - єдина з точністю до множення на константу функція, що володіє такою властивістю.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

23. Ряд Тейлора-Маклорена

Зображення аналітичної функції у вигляді ряду в нулі. Взагалі кажучи, такий ряд можна побудувати для більш широкого класу функцій, які називаються гладкими, однак у цьому випадку у формулі не можна ставити знак рівності.

$$A\mathrm{x} = \lambda \mathrm{x}$$

24. Рівняння для власного вектора оператора

Поняття власного вектора оператора, тобто вектора, який при дії цього оператора просто розтягується, є одним з ключових в лінійній алгебрі. Це поняття вкрай корисне, наприклад, у квантовій механіці - станами квантових систем є власні вектора в деякому (правда, нескінченновимірному) просторі.

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

25. Нерівність трикутника

Нерівність трикутника для нормованих просторів. Найпростіший приклад такої норми - це корінь квадратний із суми квадратів координат вектора в тривимірному просторі. У цьому випадку ця нерівність перетворюється на звичайну нерівність трикутника: сума двох сторін не менша третьої.

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

26. Асимптотика пі-функції

Пі-функцією називається функція, яка дорівнює кількості простих чисел, менших заданого дійсного *x* або рівних йому. Як показав у XIX столітті Жак Адамар, ця функція зростає приблизно як відношення в правій частині. Це означає, що простих чисел, що не перевершують *x*, приблизно *x/log x*.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

27. Формула Ейлера для дзета-функції Рімана

Як виявилося, іноді буває корисно працювати не з нескінченними сумами, а з нескінченними добутками. У правій частині стоїть добуток за всіма простими числами *p* - ще один чудовий факт, що зв'язує дзета-функцію і теорію чисел.

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

28. Піфагорова трійка

Трійки натуральних чисел, які можуть бути сторонами прямокутного трикутника, отримали назву піфагорових. Вважається, що трійка (3, 4, 5) була відома ще стародавнім єгиптянам.

$$\frac{d^n}{dz^n} f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_c \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$$

29. Інтегральна формула Коші

Формула дозволяє зв'язати кратні похідні комплексно-аналітичної функції з інтегралом по контуру. Завдяки цій формулі доводиться еквівалентність декількох визначень комплексно-аналітичної функції. Зокрема, якщо вона диференційовна, то розкладається в збіжний ряд.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

30. Число "пі" у вигляді ряду

Зображення числа «пі» у вигляді ряду від дробів з непарними знаменниками.

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

31. Ейлерова сума обернених квадратів

У віці 28 років Леонард Ейлер довів, що сума обернених квадратів пов'язана з числом «пі». Це негайно принесло йому славу - на той момент задача вважалася вкрай складною, над нею безуспішно билися кращі уми того часу.

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}, \qquad |r| < 1$$

32. Сума геометричної прогресії

Геометричною прогресією називається послідовність чисел, в якій кожне наступне отримується з попереднього множенням на деяке фіксоване число *r*.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \geq \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad a_k > 0$$

33. Нерівність для середніх, відкрита Коші

Нерівність пов'язує середнє арифметичне і середнє геометричне чисел.

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\big(1 + o(n)\big)$$

34. Формула Стірлінга

Формула Стірлінга дозволяє оцінити швидкість росту такої функції, як факторіал *n!*

$$V_n(r) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} r^n$$

35. Об'єм n-вимірної кулі радіусом r

У формулу для об'єму *n*-вимірної кулі входить гамма-функція.

$$\Delta\varphi = 0$$

36. Рівняння Лапласа

Це рівняння виникає в задачах механіки, теплопровідності, електростатики, гідравліки. Оператор Лапласа, що стоїть в лівій частині, відіграє важливу роль у квантовій механіці. Там з його допомогою визначається рівняння Шредінгера.

$$a^n + b^n = c^n, \qquad n > 2$$

37. Велика теорема Ферма

Твердження великої теореми Ферма, доведеної в 1995 році Ендрю Уайлзом, каже, що записане рівняння не розв'язне для цілих ненульових *a, b, c*.

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

38. Функціональне рівняння на гамма- і дзета-функції

Це рівняння дозволяє, серед іншого, формалізувати поняття «суми всіх натуральних чисел», яке виникає в теорії струн.